E.N.S. ULM-SEVRES 1986

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

AVERTISSEMENT

L'emploi d'une calculatrice de poche est *autorisé et recommandé*. Les candidats sont priés d'indiquer la marque et le modèle de leur calculatrice, et de mentionner si celle-ci est *programmable*. Si des programmes sont utilisés pour les calculs, il peut être utile de donner quelques détails sous forme de liste ou d'organigramme.

I

On considère le polynôme à une variable :

$$P(x) = x^7 - 7x + 3 ,$$

dont on cherche à déterminer les racines; dans la première partie, on s'intéresse aux racines réelles. Tout nombre réel s'écrit de manière unique sous la forme $x = n + \theta$, avec n entier et $0 \leqslant \theta < 1$; on dit que n est la *partie entière* de x, quel que soit le signe de ce nombre.

1° Par étude des variations de $P(x)$ pour x réel, et calcul de $P(n)$ pour certains entiers n bien choisis, démontrer que le polynôme $P(x)$ a (exactement) trois racines réelles; on les note x_1, x_2, x_3 et l'on convient que l'on a $x_1 < x_2 < x_3$. Déterminer les parties entières n_1, n_2, n_3 de ces racines.

2° La méthode de *dichotomie* est la suivante. On se fixe deux nombres réels a et b tels que $a < b$ et $P(a).P(b) < 0$, et un nombre strictement positif ε; on engendre deux suites de nombres $a_0, a_1, \ldots, a_N$ et $b_0, b_1, \ldots, b_N$ par les règles suivantes :

— on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$;

— supposons a_n et b_n déjà déterminés; si l'on a $|a_n - b_n| \leqslant \varepsilon$, on pose $N = n$ et on arrête le calcul; dans le cas contraire, on posé $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$; si l'on a $P(a_{n+1}) = 0$, on pose $b_{n+1} = a_{n+1}$; si l'on a $P(a_{n+1}) \neq 0$, on prend pour b_{n+1} celui des nombres a_n et b_n pour lequel on a $P(a_{n+1}).P(b_{n+1}) < 0$.

On note α le plus petit des nombres a_N et b_N, et β le plus grand. *Montrer* que l'on a $|\beta - \alpha| \leqslant \varepsilon$, $N < 1 + \log[(b - a)/\varepsilon]/\log 2$ et qu'il existe une racine du polynôme $P(x)$ dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

3° Appliquer la méthode de dichotomie avec $a = n_i$, $b = n_i + 1$ et $\varepsilon = 10^{-2}$ (pour chacune des valeurs $i = 1, 2, 3$). On donnera sous forme de table les nombres :

$$a_0, a_1, \ldots, a_N ; b_0, b_1, \ldots, b_N ; P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_N) ; P(b_0), P(b_1), \ldots, P(b_N)$$

et l'on en déduira une valeur approchée de x_1, x_2, x_3 à 10^{-2} près, notée x_1', x_2' ou x_3'.

4° La *méthode de la tangente* de Newton-Raphson est la suivante. On note $P'(x)$ la dérivée du polynôme $P(x)$ et l'on pose $F(x) = x - P(x)/P'(x)$. On se fixe un nombre réel a et un nombre strictement positif ε; on engendre une suite de nombres $c_0, c_1, \ldots, c_N$ par les règles suivantes :

— on pose $c_0 = a$, et $c_1 = F(a)$;

— si l'on a $n \geqslant 1$ et que c_n soit déjà déterminé, on pose $N = n$ et on arrête le calcul si l'on a $|c_n - c_{n-1}| \leqslant \varepsilon$; dans le cas contraire, on pose $c_{n+1} = F(c_n)$.

Dans les cas que l'on envisage ici, le calcul s'arrête (mais il existe des cas où la suite engendrée a une infinité de termes).

On applique cette méthode avec a égal à x_1', x_2' puis x_3' et $\varepsilon = 10^{-9}$. Le nombre c_N sera noté x_1'', x_2'' et x_3'' dans ces trois cas. Essayer de *prouver* que x_i'' est une valeur approchée de x_i à 10^{-9} près (autrement dit, que l'on a $|x_i'' - x_i| < 10^{-9}$).

Tournez la page S. V. P.

page 37 1986 ENS Ulm-Sèvres Groupe A Épreuve pratique

5° Déterminer les coefficients du polynôme $P_1(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $P_1(x)$ sous la forme :

$$P(x) = P_1(x).Q(x) + R(x)$$

où $R(x)$ est un polynôme de degré $\leqslant 2$. Donner les valeurs des coefficients de $P_1(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$ à 10^{-9} près, en indiquant le détail des calculs.

II

1° Considérons un polynôme de degré 4 à coefficients réels, à racines distinctes,

$$\Pi(x) = x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

Pour tout nombre complexe u, on définit un polynôme $P_u(x, y)$ en les variables x, y :

$$P_u(x, y) = (c_2 - u) x^2 + c_1 xy + y^2 + c_3 x + uy + c_4$$

Montrer qu'il existe 4 couples de nombres complexes (x_i, y_i), liés aux racines de $\Pi(x)$, tels que l'on ait $P_u(x_i, y_i) = 0$ pour *tout* nombre complexe u.

2° Déterminer en fonction de c_1, c_2, c_3, c_4 des nombres réels r_1, r_2, r_3 tels que le polynôme :

$$D(u) = u^3 - r_1 u^2 + r_2 u - r_3$$

ait la propriété suivante : « on a $D(u) = 0$ si et seulement si le polynôme $P_u(x, y)$ est un produit $L(x, y)\, M(x, y)$ de deux polynômes de degré total 1 ».

3° On suppose qu'aucune racine de $\Pi(x)$ n'est réelle et l'on note ces racines sous la forme a, $\bar{a}$, b, $\bar{b}$ (où $\bar{z}$ désigne le conjugué d'un nombre complexe z); on note u_1, u_2 et u_3 les racines de $D(u)$. Exprimer les u_i en fonction de a et de b (on montrera que les nombres u_i sont réels et on les supposera numérotés de sorte que l'on ait $u_1 < u_2 < u_3$).

4° Montrer comment calculer $a + \bar{a}$, $b + \bar{b}$, $a\bar{a}$ et $b\bar{b}$ par extraction de racines carrées, supposant connus les nombres c_1, c_2, c_3, c_4 et u_3. Comment achever le calcul des racines de $\Pi(x)$?

III

On applique la méthode de la partie II au cas où $\Pi(x) = Q(x)$. On donnera les résultats des calculs avec 9 chiffres significatifs.

1° Calculer r_1, r_2 et r_3.

2° Prouver que le polynôme $Q(x)$ a 4 racines distinctes, non réelles, et que $D(u)$ a trois racines réelles $u_1 < u_2 < u_3$.

3° Déterminer u_3 en s'inspirant de la partie I.

4° Achever la détermination des racines du polynôme $Q(x)$.

IV

Donner sous forme de table les racines du polynôme $x^7 - 7x + 3$, les parties réelles et imaginaires étant données avec 9 chiffres significatifs.

N.B. — Le polynôme $x^7 - 7x + 3$ est le premier exemple connu, découvert en 1977, d'un polynôme à coefficients entiers, dont le *groupe de Galois* soit le groupe simple d'ordre 168. Le calcul des racines est la première étape dans la détermination du groupe de Galois.

ENS Ulm-Sèvres
Groupe A. Epreuve pratique
1986
page 33